7.9 Homojen Olmayan Lineer Sistemler

Bu bölümde,

$$x' = p(t)x + g(t) \qquad (7.13)$$

homojen olmayan lineer denklem sistemi incelenecektir. Burada $\alpha < t < \beta$ aralığında $n\times 1$ tipindeki $g(t)$ vektörü ve $n\times n$ tipindeki $P(t)$ matrisi süreklidirler.

(7.13) sisteminin homojen kısmı

$$x' = p(t)x$$

genel çözümü $\quad c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}(t) = x_h$

ve homojen olmayan (7.13) sisteminin bir özel çözümü $v(t)$ ise (7.13)' ün genel çözümü

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t) + v(t) = x_h + v(t)$$

şeklindedir.

Şimdi $v(t)$ özel çözümünü bulmanın birkaç yöntemini verelim.

Köşegenleştirme

A, $n\times n$ tipinde köşegenleştirilebilir sabit bir matris olmak üzere

$$x' = Ax + g(t) \qquad (7.27)$$

formundaki denklem sistemini düşünelim. A matrisinin $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ özvektörlerini sütun kabul eden matrisi T ile gösterelim ve

$$x = Ty$$

dönüşümü yardımıyla yeni y değişkeni tanımlayalım. Bu denklemi (7.27)'de yerine yazarsak

$$Ty' = ATy + g(t)$$

ve T^{-1} ile soldan çarparsak

$$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}g(t) = Dy + h(t)$$

elde ederiz. Burada D köşegenleri A'nın özdeğerleri $r_1, r_2, \dots, r_n$ olan köşegen matris ve $h(t) = T^{-1}g(t)$ dir. Birinci mertebe lineer dif. denklem çözülerek $y_1(t), \dots, y_n(t)$ bulunduktan sonra $x = Ty$ ile x bulunur.

Örnek: $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ lineer sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$ 'in genel çözümünü $x = \xi e^{rt}$ şeklinde ararsak
$\begin{pmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ denklemini çözmemiz gerekir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için $\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 1 = (r+1)(r-1) = 0$ olması gerekir. $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ özdeğerlerine karşı gelen özvektör $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ve $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$'dir. Homojen kısmın genel çözümü

$$x_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

dir.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} t \\ y_2 + \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} t \end{pmatrix}$$

$$y_1' + y_1 = -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} t$$

$$y_2' - y_2 = \frac{3}{2} e^t - \frac{1}{2} t$$

$$y_1 = c_1 e^{-t} - \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}$$

$$y_2 = c_2 e^t + \frac{3}{2} t e^t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$$

$$x = Ty = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 3y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + (c_2 - \frac{1}{4}) e^t + \frac{3}{2} t e^t + t \\ 3c_1 e^{-t} + (c_2 - \frac{3}{4}) e^t + \frac{3}{2} t e^t + 2t - 1 \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu yöntemi P matrisi sabit katsayılı ve g, polinom, eksponansiyel, sinüs, kosinüs veya bunların toplamları şeklindeyse uyguluyoruz.

Örnek: $x' = Ax + g(t) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}e^t\\ t\end{pmatrix}$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$g(t) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}t$ ve $x_h = c_1\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t$ olduğundan özel çözümü

$$v(t) = ate^t + be^t + ct + d$$

şeklinde arıyoruz. Burada a, b, c, d vektörlerdir. Homojen çözümde e^t olduğundan t ile çarptık. v(t)'yi denklemde yerine yazarsak

$$ate^t + (a+b)e^t + c = Aate^t + Abe^t + Act + Ad + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}t$$

elde edilir. a, b, c, d için aşağıdaki cebirsel denklem elde edilir.

$$Aa = a$$
$$Ab = a + b - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$
$$Ac = -\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$
$$Ad = c$$

Birinci denklemde a, A'nın özvektörü ve bunu r sağlar. Bu durumda α bir sabit olmak üzere $a = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$ dır. $b = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ dersek ikinci denklemden

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}b_1 - b_2 = \alpha - 1\\ 3b_1 - 3b_2 = \alpha\end{matrix} \quad 3(\alpha - 1) = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k + \frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

En basit seçim $k = 0$ almaktır. $b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ olur.

$$Ac = -\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2c_1 - c_2 = 0\\ 3c_1 - 2c_2 = -1\end{matrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

$$c = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$Ad = c \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2d_1 - d_2 = 1\\ 3d_1 - 2d_2 = 2\end{matrix} \Rightarrow d_1 = 0, d_2 = -1$$

$$d = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$v(t) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}te^t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

Önceki yöntemle bulduğumuz çözümün bununla aynı olması için $k = -\frac{3}{4}$ almalıyız. Bu durumda iki çözüm aynıdır.

Sabitlerin Değişimi Yöntemi (Parametrelerin Değişimi Yöntemi)

Bu yöntemde katsayılar matrisinin sabit veya köşegenleştirilebilir olması gerekmez. Dolayısıyla daha genel bir yöntemdir. $\alpha<t<\beta$ aralığında $P(t)$ ve $g(t)$ sürekli olmak üzere

$$x' = P(t)x + g(t) \qquad (7.13)$$

sistemi verilsin. Sistemin homojen kısmı için $\psi(t)$ temel matrisini bulduğumuzu kabul edelim. Bu durumda homojen kısmın genel çözümü $\psi(t)c$ dir. İkinci mertebeden lineer dif. denklemlerde olduğu gibi c sabit vektörü yerine $u(t)$ vektör fonksiyonunu alarak çözümü arayalım. Buna göre $u(t)$ bulmak istediğimiz vektör olmak üzere

$$x = \psi(t)\,u(t) \qquad (7.28)$$

yazalım ve (7.28)'in t'ye göre türevini alıp (7.13)'te yerine koyalım

$$\psi'(t)\,u(t) + \psi(t)\,u'(t) = P(t)\,\psi(t)\,u(t) + g(t) \qquad (7.29)$$

$\psi(t)$ temel matrisi $\psi'(t) = P(t)\,\psi(t)$ denklemini sağladığından (7.29) denklemi

$$\psi(t)\,u'(t) = g(t)$$

denklemine indirgenir. $\psi(t)$ singüler olmadığından $\psi^{-1}(t)$ vardır ve

$$u'(t) = \psi^{-1}(t)\,g(t)$$

dir. Buna göre

$$u(t) = \int \psi^{-1}(t)\,g(t)\,dt + c$$

dir. Burada c keyfi sabit vektördür. (7.28)'de $u(t)$ yerine yazılırsa sistemin çözümü

$$x = \psi(t)\,c + \psi(t)\int \psi^{-1}(t)\,g(t)\,dt$$

olarak bulunur.

Örnek: $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Homojen kısım $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$ 'in genel çözümü $x_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$

olduğundan temel matris $\psi(t)$,

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla homojen kısmın çözümünü $\psi(t)c$ şeklinde yazabiliriz.

Genel çözüm için

$$x = \psi(t)u(t)$$

şeklinde çözüm ararsak

$$\psi(t)u'(t) = g(t)$$

denklemini sağlamız gerekir.

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1'(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t \\ u_2'(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}te^{-t} \end{array}$$

$$\left[\text{veya } u'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \psi^{-1}(t)g(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t & -e^t \\ -3e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}te^{-t} \end{pmatrix}\right]$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + c_1$$

$$u_2(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + c_2$$

$$x = \psi(t)u(t) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ 3e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + c_1 \\ \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + c_2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^t + \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t + t \\ 3c_1e^{-t} + c_2e^t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{4}e^t + 2t - 1 \end{pmatrix}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$